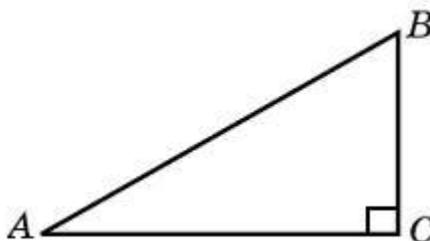


ЗАДАНИЕ №9

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4,8$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB .

Решение. По определению синуса $\sin A = \frac{BC}{AB}$, значит, по условию $BC = 7x$, $AB = 25x$. Тогда, по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AC^2 = 625x^2 - 49x^2 = 576x^2$. То есть $AC = 24x$. По условию $24x = 4,8 \rightarrow x = 0,2 \rightarrow AB = 25x = 25 \cdot 0,2 = 5$.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .

Решение. По определению косинуса $\cos A = \frac{AC}{AB}$, значит, $AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{4}{0,5} = 8$.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AB .

Решение. По определению тангенса $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, значит, по условию $BC = \sqrt{33}x$, $AC = 4x$. По условию $4x = 4 \rightarrow x = 1$. Тогда, по теореме

Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = 33x^2 + 16x^2 = 49x^2$. То есть,

$$AB = 7x = 7.$$

4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 8$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите BC .

Решение. По определению тангенса $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, значит, $BC = AC \cdot \operatorname{tg} A = 8 \cdot 0,5 = 4$.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 4$, $\sin A = 0,5$. Найдите AB .

Решение. По определению синуса $\sin A = \frac{BC}{AB}$, значит, $AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{4}{0,5} = 8$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 2$, $\cos A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите AC .

Решение. По определению косинуса

$\cos A = \frac{AC}{AB}$, значит, по условию $AC = x$, $AB = \sqrt{17}x$. Тогда, по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow BC^2 = 17x^2 - x^2 = 16x^2$. То есть $BC = 4x$. По условию $4x = 2 \rightarrow x = 0,5 \rightarrow AC = x = 0,5$.

7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 4$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите AC .

Решение. По определению тангенса $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, значит, $AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = \frac{4}{0,5} = 8$.

8. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 24$, $BC = 7$. Найдите $\sin A$

Решение. По определению синуса

$\sin A = \frac{BC}{AB}$. Тогда, по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = 576 + 49 = 625$. То есть $AB = 25$. Получаем $\sin A = \frac{7}{25} = 0,28$.

9. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

Решение. По условию $BC = 6$, $AB = 10$. Тогда, по теореме Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AC^2 = 100 - 36 = 64. \text{ То есть } AC = 8.$$

$$\text{Получаем } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

10. Площадь прямоугольного треугольника равна $50\sqrt{3}$. Один из острых углов равен 60° . Найдите длину катета, прилежащего к этому углу.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами

$\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$ имеем $AB = x$, $BC = 0,5x$, $AC =$

$0,5\sqrt{3}x$. Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$ следует, что $50\sqrt{3} =$

$$\frac{0,5x \cdot 0,5\sqrt{3}x}{2} \rightarrow x^2 = 50 \cdot 8 \rightarrow x^2 = 400 \rightarrow x = 20 \rightarrow BC = 0,5 \cdot 20 = 10.$$

11. Площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{50\sqrt{3}}{3}$. Один из острых углов равен 30° . Найдите длину катета, прилежащего к этому углу.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$ имеем $AB = x$, $BC = 0,5x$, $AC = 0,5\sqrt{3}x$. Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$ следует, что $\frac{50\sqrt{3}}{3} = \frac{0,5x \cdot 0,5\sqrt{3}x}{2} \rightarrow x^2 = \frac{50 \cdot 8}{3} \rightarrow x^2 = \frac{400}{3} \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}} \rightarrow AC = 0,5\sqrt{3} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} = 10$.

12. Площадь прямоугольного треугольника равна $12,5 \cdot \sqrt{3}$. Один из острых углов 30° . Найдите длину гипотенузы.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$ имеем $AB = x$, $BC = 0,5x$, $AC = 0,5\sqrt{3}x$. Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$ следует, что $12,5\sqrt{3} = \frac{0,5x \cdot 0,5\sqrt{3}x}{2} \rightarrow x^2 = 12,5 \cdot 8 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10 \rightarrow AB = 10$.

13. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, а угол, лежащий напротив него, равен 45° . Найдите площадь треугольника.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 45^\circ$ и $\angle B = 45^\circ$ имеем $AB = \sqrt{2}x$, $BC = x$, $AC = x$. По условию $x = 10$. По формуле площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$.

14. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10, а один из острых углов равен 45° . Найдите площадь треугольника.

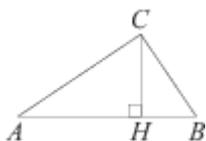
Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 45^\circ$ и $\angle B = 45^\circ$ имеем $AB = \sqrt{2}x$, $BC = x$, $AC = x$. По условию $\sqrt{2}x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$. По формуле площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{25 \cdot 2}{2} = 25$.

15. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 15. Найдите синус наименьшего угла этого треугольника.

Решение. Наименьший угол лежит против меньшего катета. Пусть $BC = 15$, $AC = 20$. По определению синуса

$\sin A = \frac{BC}{AB}$. Тогда, по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = 400 + 225 = 625$. То есть $AB = 25$. Получаем $\sin A = \frac{15}{25} = 0,6$.

16. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 35$, а высота CH , опущенная на гипотенузу, равна $14\sqrt{6}$. Найдите $\sin \angle ABC$.



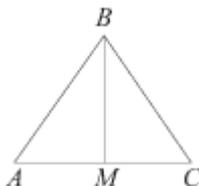
Решение. В прямоугольном треугольнике AHC $\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC} = \frac{14\sqrt{6}}{35} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

В прямоугольном треугольнике ABC $\cos B = \sin A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \rightarrow \sin^2 B = 1 - \frac{4 \cdot 6}{25} = \frac{1}{25} \rightarrow \sin B = \frac{1}{5} = 0,2$.

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

$$AB = BC$$

$$BM \perp AC$$



17. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.

Решение. Проведем высоту BM к основанию AC . По свойству равнобедренного треугольника – высота, проведенная к основанию, является медианой. Значит $AM = MC = 3$. Тогда, по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ABM :

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \rightarrow BM^2 = 25 - 9 = 16. \text{ То есть } BM = 4.$$

$$\text{Получаем } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BM}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$$

18. Площадь равнобедренного треугольника равна $25\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания, равен 120° . Найдите длину боковой стороны треугольника.

Решение.

По условию $\angle B =$

120° . По свойству равнобедренного треугольника $\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABM имеем $AB =$

$x, BM = 0,5x, AM = 0,5\sqrt{3}x$, тогда $AC = 2AM =$

$\sqrt{3}x$. Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BM}{2}$ следует, что $25\sqrt{3} = \frac{0,5x \cdot \sqrt{3}x}{2} \rightarrow x^2 = 25 \cdot 4 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10 \rightarrow AB = 10$.

19. Периметр равнобедренного треугольника равен 16, а боковая сторона — 5. Найдите площадь треугольника.

Решение. Тогда сумма боковых сторон равна 10, а основание равно $16 - 10 = 6$.

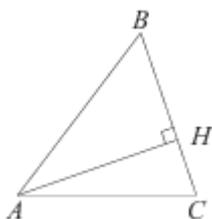
Проведем высоту BM к основанию AC . По свойству равнобедренного треугольника – высота, проведенная к основанию, является медианой.

Значит $AM = MC = 3$. Тогда, по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ABM :

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \rightarrow BM^2 = 25 - 9 = 16. \text{ То есть } BM = 4.$$

$$\text{Получаем } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BM}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$$

20. В треугольнике ABC $AB = BC$, а высота AH делит сторону BC на отрезки $BH = 18$ и $CH = 18$. Найдите $\cos \angle B$.



Решение. В прямоугольном треугольнике AHB $\cos \angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{BC} = \frac{BH}{BH + HC} = \frac{18}{36} = 0,5$.

21. В треугольнике ABC $AB = BC = 25$, $AC = 14$. Найдите длину медианы BM .

Решение. По свойству равнобедренного треугольника – медиана, проведенная к основанию, является высотой. Значит $AM = MC = 7$.

Тогда, по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ABM :

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \rightarrow BM^2 = 625 - 49 = 576. \text{ То есть } BM = 24.$$

22. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 122° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.

Решение. Внешний угол треугольника является смежным к внутреннему. Следовательно, внутренний угол при вершине B равен $180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$. По свойству равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B = 58^\circ$, тогда $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 58^\circ = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$.

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

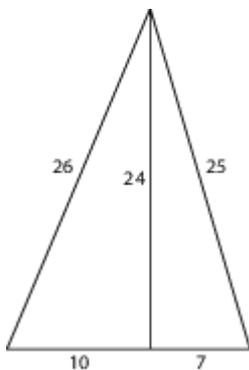
23. В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Решение. Обозначим неизвестную высоту через x . Используем метод площадей, вычислив площадь двумя способами:

$$S = \frac{9 \cdot 4}{2} = \frac{6 \cdot x}{2}.$$

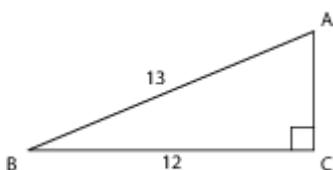
Получаем $x = \frac{9 \cdot 4}{6} = 6$.

24. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.



Решение. По обратной теореме Пифагора треугольник со сторонами 10, 24, 26 является прямоугольным, так как $10^2 + 24^2 = 26^2$. Имеем сторону 17 и высоту, опущенную на неё, равную 24. Тогда площадь равна $0,5 \cdot 24 \cdot 17 = 204$.

25. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

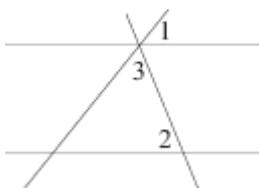


Решение. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AC^2 = 169 - 144 = 25$. То есть $AC = 5$.

$$\text{Получаем } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30.$$

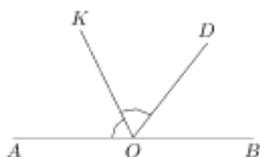
ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВ

26. Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 24^\circ$, $\angle 2 = 90^\circ$. Ответ дайте в градусах.



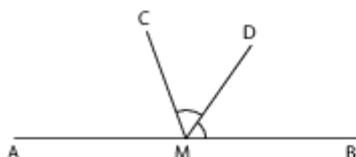
Решение. По свойству равенства накрест лежащих углов при пересечении параллельных прямых секущей - угол накрест лежащий к $\angle 2$ равен $\angle 2$. Тогда $\angle 1$, накрест лежащий к $\angle 2$ и $\angle 3$ образуют развернутый угол. Значит, $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 180^\circ - 24^\circ - 90^\circ = 66^\circ$.

27. Найдите величину угла $\angle DOK$, если OK — биссектриса угла $\angle AOD$, а $\angle DOB = 52^\circ$. Ответ дайте в градусах.



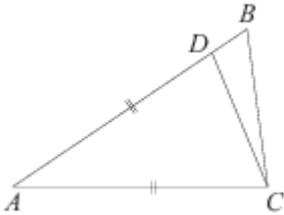
Решение. По свойству смежных углов $\angle DOA = 180^\circ - \angle DOB = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$. По определению биссектрисы $\angle DOK = 128^\circ : 2 = 64^\circ$.

28. На прямой AB взята точка M . Луч MD — биссектриса угла $\angle CMB$. Известно, что $\angle DMC = 60^\circ$. Найдите угол $\angle CMA$. Ответ дайте в градусах.



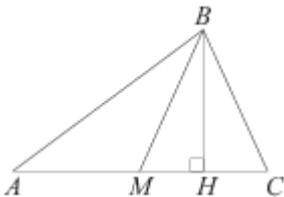
Решение. По свойству смежных углов $\angle DOA = 180^\circ - \angle DOB = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$. По определению биссектрисы $\angle CMB = 2\angle DMC = 120^\circ$. По свойству смежных углов $\angle CMA = 180^\circ - \angle CMB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

29. Точка D на стороне AB треугольника ABC выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что $\angle CAB = 13^\circ$ и $\angle ACB = 143^\circ$. Найдите угол DCB . Ответ дайте в градусах.



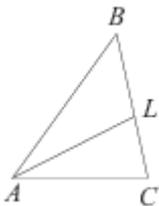
Решение. По свойству равнобедренного треугольника ADC $\angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - \angle CAB}{2} = \frac{180^\circ - 13^\circ}{2} = 83,5^\circ$. Тогда $\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 143^\circ - 83,5^\circ = 59,5^\circ$.

30. В треугольнике ABC BM — медиана и BH — высота. Известно, что $AC = 164$, $HC = 41$ и $\angle ACB = 74^\circ$. Найдите угол AMB . Ответ дайте в градусах.



Решение. По определению медианы $AM = MC = AC : 2 = 164 : 2 = 82$. Тогда $MH = MC - HC = 82 - 41 = 41$, значит $MH = HC$, то есть треугольник BMC равнобедренный. По свойству равнобедренного треугольника $\angle CMB = \angle ACB = 74^\circ$. По свойству смежных углов $\angle AMB = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$.

31. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL , угол ALC равен 150° , угол ABC равен 127° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



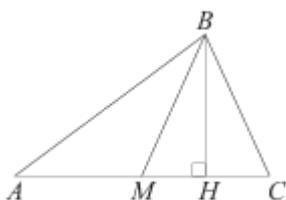
Решение. По свойству смежных углов $\angle ALB = 180^\circ - \angle ALC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Тогда в треугольнике ABL $\angle BAL = 180^\circ - \angle ABC - \angle ALB = 180^\circ - 127^\circ - 30^\circ = 23^\circ$. По определению биссектрисы $\angle BAC = 2\angle BAL = 46^\circ$. Тогда в треугольнике BAC $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 46^\circ - 127^\circ = 7^\circ$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

32. Высота равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите его периметр.

Решение. Пусть a – сторона равностороннего треугольника. Тогда высота равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Получаем $a=26$.

33. В треугольнике ABC BM — медиана и BH — высота. Известно, что $AC = 13$ и $BC = BM$. Найдите AH .

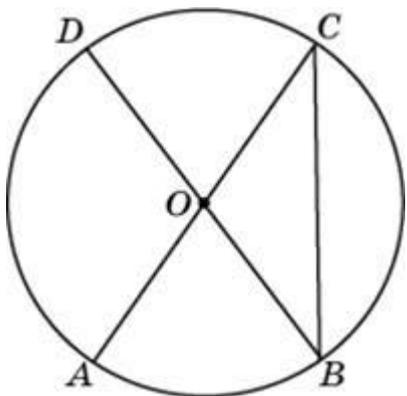


Решение. По определению медианы $AM=MC=AC:2=13:2=6,5$. Так как $BM=BC$, то в равнобедренном треугольнике BMC высота BH является медианой и, значит, $MH=MC:2=3,25$. Тогда $AH=AM+MH=6,5+3,25=9,75$.

ЗАДАНИЕ №10

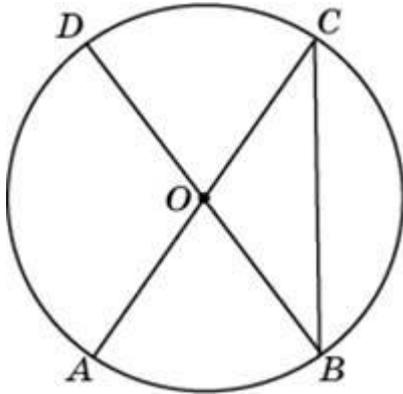
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ

1. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 38° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



Решение По свойству вписанного угла ACB имеем: $\overset{\frown}{AB} = 38^\circ \cdot 2 = 76^\circ$. По свойству центрального угла $\angle AOB = 76^\circ$. По свойству смежных углов $\angle AOD = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

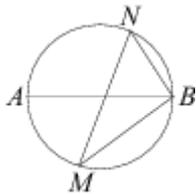
2. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол AOD равен 110° . Найдите вписанный угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Решение

По свойству смежных углов $\angle AOB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. По свойству центрального угла AOB имеем: $\overset{\frown}{AB} = 70^\circ$. По свойству вписанного угла $\angle ACB = 70^\circ : 2 = 35^\circ$.

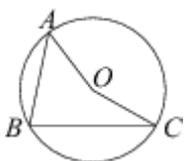
3. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N . Известно, что $\angle NBA = 36^\circ$. Найдите угол NMB . Ответ дайте в градусах.



Решение По свойству вписанного угла NBA имеем: $\overset{\frown}{AN} = 36^\circ \cdot 2 = 72^\circ$. Так как концы диаметра делят окружность на две равные дуги по 180° ,

то $\overset{\frown}{BN} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. По свойству вписанного угла $\angle NMB = 108^\circ : 2 = 54^\circ$.

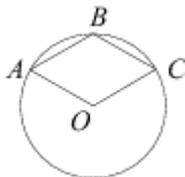
4. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A , B и C . Известно, что $\angle ABC = 75^\circ$ и $\angle OAB = 43^\circ$. Найдите угол BCO . Ответ дайте в градусах.



Решение Треугольники AOB и BOC - равнобедренные, так как $AO=BO=CO$ — радиусы окружности. Следовательно, $\angle OBA = \angle OAB = 43^\circ$, тогда

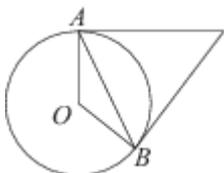
$\angle OBC = \angle ABC - \angle OBA = 75^\circ - 43^\circ = 32^\circ$. По свойству равнобедренного треугольника $\angle BCO = \angle OBC = 32^\circ$.

5. Точка O — центр окружности, на которой лежат точки A , B и C таким образом, что $OABC$ — ромб. Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



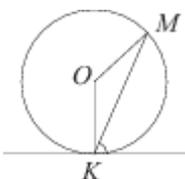
Решение Треугольник AOB — равносторонний, так как $AO = BO$ — радиусы окружности и $AO = BA$ — стороны ромба. Следовательно, $\angle OAB = 60^\circ$, тогда смежный угол ромба $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

6. Касательные к окружности с центром O в точках A и B пересекаются под углом 72° . Найдите угол ABO . Ответ дайте в градусах.



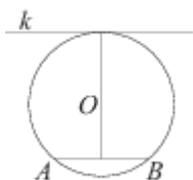
Решение Пусть касательные пересекаются в точке M . Отрезки касательных, проведенных из одной точки равны: $AM = MB$, значит треугольник AMB — равнобедренный. По свойству равнобедренного треугольника $\angle MVA = \frac{180^\circ - \angle AMB}{2} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$. Так как радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, то $\angle OBM = 90^\circ \rightarrow \angle ABO = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

7. Прямая касается окружности в точке K . Точка O — центр окружности. Хорда KM образует с касательной угол, равный 83° . Найдите величину угла OMK . Ответ дайте в градусах.



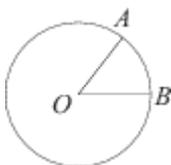
Решение Так как радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, то $\angle OKM = 90^\circ - 83^\circ = 7^\circ$. Треугольник KOM — равнобедренный, так как $KO = MO$ — радиусы окружности. По свойству равнобедренного треугольника $\angle OMK = \angle OKM = 7^\circ$.

8. Длина хорды окружности равна 72, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 27. Найдите диаметр окружности.



Решение Треугольник OAB – равнобедренный, так как $OA=OB$ – радиусы окружности. Тогда перпендикуляр OH , опущенный на хорду из центра окружности, делит AB пополам. Значит, треугольник OAH – прямоугольный и $OH=27$, $AH=72:2=36$. По теореме Пифагора $OA^2 = OH^2 + AH^2 \rightarrow OA^2 = 27^2 + 36^2 \rightarrow OA^2 = 2025 \rightarrow OA = 45$. Тогда диаметр окружности равен 90.

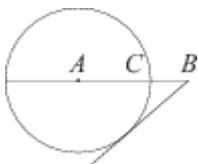
9. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 66^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 99. Найдите длину большей дуги.



Решение По свойству центрального угла AOB имеем: меньшая дуга $\overset{\frown}{AB} = 66^\circ$. Обозначим длину большей дуги AB через x и составим пропорцию

$$\frac{x}{99} = \frac{360^\circ - 66^\circ}{66^\circ} \rightarrow \frac{x}{99} = \frac{294^\circ}{66^\circ} \rightarrow x = \frac{99 \cdot 294}{66} = \frac{3 \cdot 294}{2} = 3 \cdot 147 = 441.$$

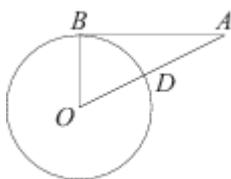
10. На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 75$ и $BC = 10$. Построена окружность с центром A , проходящая через C . Найдите длину касательной, проведённой из точки B к этой окружности.



Решение По построению AC является радиусом окружности. Обозначим через K второй конец диаметра, проходящего через точки A и C , и через H – точку касания. По теореме о квадрате касательной $BH^2 = BC \cdot BK \rightarrow BH^2 = BC \cdot (BC + CK) \rightarrow BH^2 = BC \cdot (BC + 2AC) \rightarrow BH^2 = 10 \cdot (10 + 2 \cdot 75) \rightarrow BH^2 = 1600 \rightarrow BH = 40$.

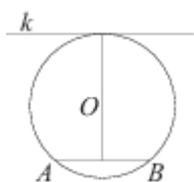
11. Отрезок $AB = 40$ касается окружности радиуса 75 с центром O в точке B

. Окружность пересекает отрезок AO в точке D . Найдите AD .



Решение Так как радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, то треугольник OAB является прямоугольным. Тогда по теореме Пифагора $OA^2 = OB^2 + AB^2 \rightarrow OA^2 = 75^2 + 40^2 \rightarrow OA^2 = 7225 \rightarrow OA = 85 \rightarrow AD = OA - OD = 85 - 75 = 10$.

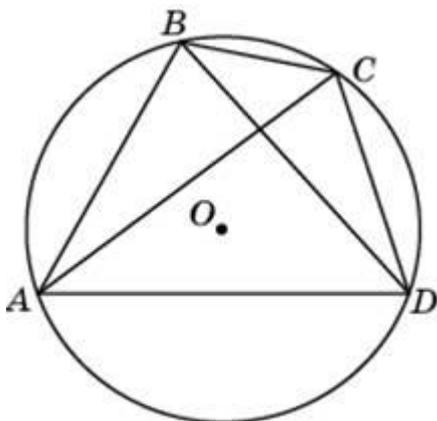
12. Радиус окружности с центром в точке O равен 85, длина хорды AB равна 80. Найдите расстояние от хорды AB до параллельной ей касательной k .



Решение Треугольник OAB – равнобедренный, так как $OA=OB$ – радиусы окружности. Тогда перпендикуляр OH , опущенный на хорду из центра окружности, делит AB пополам. Значит, треугольник OAH – прямоугольный и $OA=85$, $AH=80:2=40$. По теореме Пифагора $OA^2 = OH^2 + AH^2 \rightarrow OH^2 = 85^2 - 40^2 \rightarrow OH^2 = 5625 \rightarrow OH = 75$. Искомое расстояние равно сумме радиуса и расстояния от центра до хорды AB , то есть $85+75=160$.

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

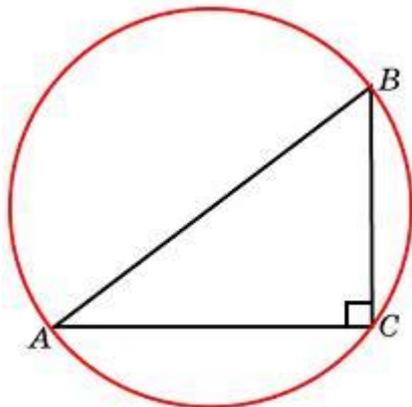
13. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



Решение По свойству вписанного угла ABC имеем: $\overset{\frown}{AC} = 105^\circ \cdot 2 = 210^\circ$. По свойству вписанного угла CAD имеем: $\overset{\frown}{CD} = 35^\circ \cdot 2 =$

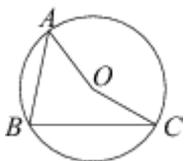
70° . Тогда $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{CD} = 210^\circ - 70^\circ = 140^\circ$. По свойству вписанного угла $\angle ABD = 140^\circ : 2 = 70^\circ$.

14. В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90° . Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



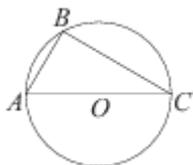
Решение По теореме Пифагора $BA^2 = CA^2 + CB^2 \rightarrow BA^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow BA^2 = 25 \rightarrow BA = 5$. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника является середина гипотенузы и радиус равен половине гипотенузы, то есть 2,5.

15. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC , в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 138^\circ$. Найдите величину угла BOC . Ответ дайте в градусах.



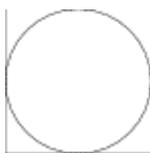
Решение По свойству вписанного угла ABC имеем: $\overset{\frown}{AC} = 138^\circ \cdot 2 = 276^\circ$. Так как треугольник равнобедренный, то $\angle A = \angle C$. Значит, эти углы опираются на равные дуги $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = (360^\circ - 276^\circ) : 2 = 42^\circ$. По свойству центрального угла имеем: $\angle BOC = \overset{\frown}{BC} = 42^\circ$.

16. Сторона AC треугольника ABC проходит через центр описанной около него окружности. Найдите $\angle C$, если $\angle A = 75^\circ$. Ответ дайте в градусах.



Решение Так как вписанный угол ABC опирается на диаметр, то он равен 90° . Тогда $\angle C = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

17. Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 83.

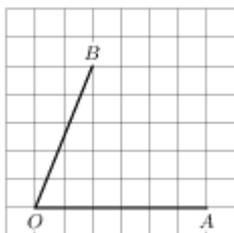


Решение Сторона квадрата равна диаметру описанной около него окружности, то есть $83 \cdot 2 = 166$. Тогда площадь квадрата равна $166^2 = 27556$.

ЗАДАНИЕ №12

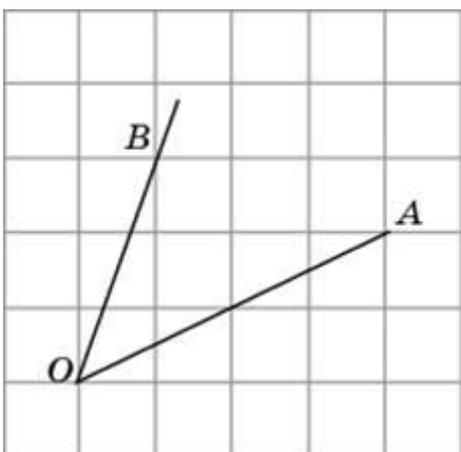
УГЛЫ

1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Решение Опустим перпендикуляр BH на OA . Тогда $\operatorname{tg} \angle BOA = \frac{BH}{OH} = \frac{5}{2} = 2,5$.

2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.

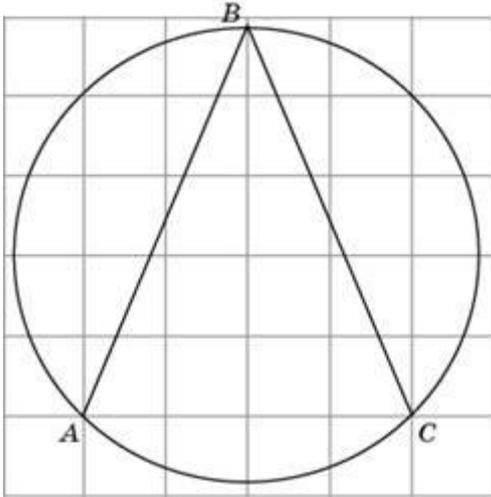


Решение **1 способ.** Соединим A и B . Вычислим длины сторон $\triangle OAB$:

$OA = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, $OB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Так как $OA^2 = OB^2 + AB^2$, то по обратной теореме Пифагора $\triangle OAB$ – прямоугольный. Тогда $\operatorname{tg} \angle BOA = \frac{BA}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$.

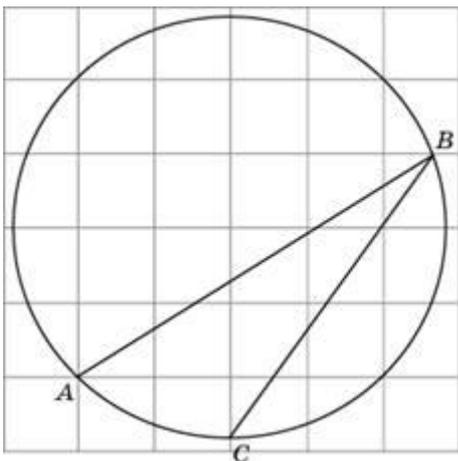
2 способ.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.



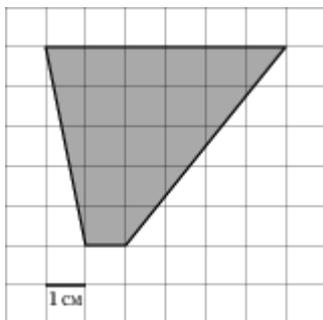
Решение Так как центральный угол $\angle AOC = 90^\circ$, то вписанный угол $\angle ABC = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

4. Найдите градусную меру дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC . Ответ дайте в градусах.



Решение Так как центральный угол $\angle AOC = 45^\circ$, то по свойству центрального угла $\overset{\frown}{AC} = 45^\circ$.

5. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



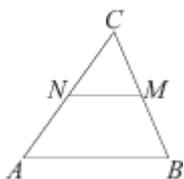
Решение 1 способ. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Основания – 1 и 6, высота 5. получаем площадь равна $0,5(1+6)5$, то есть равна 17,5.

2 способ. Используем метод вырезания. Дополним трапецию до прямоугольника. Прямоугольник будет состоять из трапеции и двух прямоугольных треугольников. И из площади полученного прямоугольника вычтем площади прямоугольных треугольников: $6 \cdot 5 - 0,5 \cdot 4 \cdot 5 - 0,5 \cdot 1 \cdot 5 = 30 - 10 - 2,5 = 17,5$.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 189. Точка E — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $AECB$

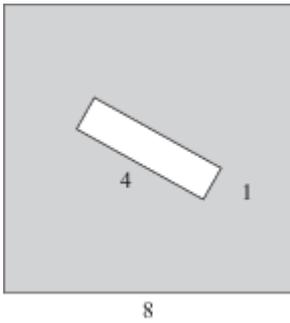
Решение

7. В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 57. Найдите площадь четырёхугольника $ABMN$.



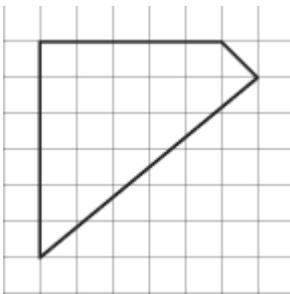
Решение Средняя линия треугольника отсекает треугольник с площадью в 4 раза меньшей площади исходного треугольника. Значит, площадь треугольника ABC равна $4 \cdot 57 = 228$. Тогда площадь $ABMN$ равна $228 - 57 = 171$.

8. Из квадрата вырезали прямоугольник (см. рисунок). Найдите площадь получившейся фигуры.



Решение Площадь получившейся фигуры равна разности площади квадрата и площади прямоугольника. Площадь квадрата равна 64, площадь прямоугольника равна 4. Значит, площадь фигуры равна 60.

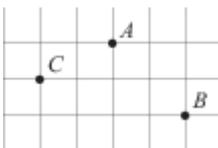
9. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.



Решение Используем метод вырезания. Дополним фигуру до прямоугольника. Прямоугольник будет состоять из нашей фигуры и двух прямоугольных треугольников. И из площади полученного прямоугольника вычтем площади прямоугольных треугольников: $6 \cdot 6 - 0,5 \cdot 1 \cdot 1 - 0,5 \cdot 6 \cdot 5 = 36 - 0,5 - 15 = 20,5$.

РАССТОЯНИЯ

10. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см \times 1 см отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC . Ответ выразите в сантиметрах.



Решение Расстояние равно 1,5.